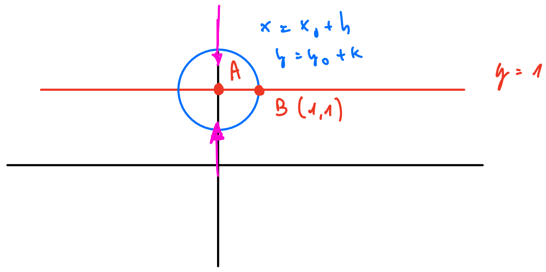
RICERCA ESTREMI

ESERCIZIO

$$f(x,y) = (y-1)^2 (x^2+y-1)$$

$$S_p = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$$



$A = (0,1)$ È SELLA
$B = (1,1)$ È MIN

LA MAT. HESSIANA NON SERVE A NULLA

$$\Delta_A f(h,k) = f(h, 1+k) - f(0,1)$$

$$h,k \longrightarrow 0$$

$$= k^2 (h^2 + k) \sim h^2 + k$$

CI INTERESSA SOLO IL SEGNO DI $\Delta_A f$
CI CONVIENE COMUNQUE SEMPRE COSA SUCCEDE PER $h, k \xrightarrow{\text{TENDE}} 0$
↳ SE QUESTO LIM. È ZERO → NON SERVE A NULLA
SE È $\neq 0$, PER TH. PERMANENZA DEL SEGNO, IL SEGNO Δf = SEGNO DEL LIM. $\neq 0$ IN OGNI INTORNO

• L'OBIETTIVO È MOSTRARE CHE Δ CAMBIA SEGNO A SECONDA DI COME MI AVVICINO AD $A = (0,1)$ ⟹ A È SELLA
↳ MI AVVICINO AD A LUNGO ASSE y → $h = 0$ E k QUALUNQUE → $h^2 + k = k$ ↳ $\begin{cases} > 0 & \text{MI AVVICINO DA SOPRA} \\ < 0 & \text{MI AVVICINO DA SOTTO} \end{cases}$

• B MIN: $\Delta_B f(h,k) = f(1+h, 1+k) - f(1,1)$

$$= k^2 \left((1+h)^2 + k\right)$$

↳ DEVO FAR VEDERE CHE ESISTE ALMENO UN INTORNO IN CUI $\Delta f_B (h,k) \geq 0$ (PER h, k SUFF. PICCOLI)

$$\Delta f_B (h,k) = k^2 \left((1+h)^2 + k\right) \sim (1+h)^2 + k$$

$\text{LIM.} \xrightarrow{h,k \to 0} 1 \neq 0$ ALLORA PER h, k PICCOLI IL SEGNO DI Δf SI MANTERRÀ POSITIVO

ESERCIZIO

$$f(x,y) = 1 - \sqrt{-x^2 + 2x - \frac{1}{4} y^2}$$

$$D: \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 + 2x - \frac{1}{4} y^2 \geq 0 \right\}$$

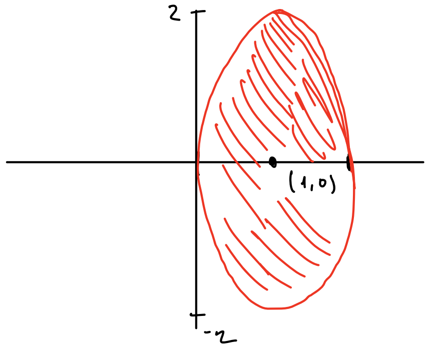
EQ. ELLISSE
$$\frac{(x-x_0)}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$-x^2 + 2x - 1 + 1 - \frac{1}{4} y^2 \geq 0$$

$$-(x^2 - 2x + 1) - \frac{1}{4} y^2 + 1 \geq 0$$

$$-(x-1)^2 - \frac{1}{4} y^2 + 1 \geq 0 \longrightarrow (x-1)^2 + \frac{1}{4} y^2 - 1 \leq 0$$

$(x-1)^2 + \frac{1}{4} y^2 \leq 1$ ⟹ ELLISSE CON CENTRO $(1,0)$
SEMIASSE x: 1
SEMIASSE y: 2



D È APERTO? NO
D È CHIUSO? SÍ

ESTREMI INTERNI AL DOMINIO:

1° PASSO: PUNTI STAZIONARI

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x-1/4\,y^2}}\,(-2x+2) = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x-1/4\,y^2}}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{-x^2+2x-1/4\,y^2}}\left(-\frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{4}\,\frac{y}{\sqrt{-x^2+2x-1/4\,y^2}}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \to x = 1 \\ f_y = 0 \to y = 0 \end{cases}$$

$$S_p = \{(1,0)\}$$

L: È INTERNO? SÍ

2° PASSO

$$H(x,y) = \frac{1}{\left(-x^2+2x+\frac{1}{4}y^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{4}y^2 & \frac{(x-1)y}{4} \\ \frac{(x-1)y}{4} & \frac{1}{4}(-x^2+2x) \end{pmatrix}$$

$$H(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$|H(1,0)| = 1/4 > 0$

$1 > 0$

$A = (1,0)$ È DI MINIMO PER HESSIANA DEF. POSITIVA

OPPURE METODO ALTERNATIVO

$$f(A) = f(1,0) = 0$$

SE A PUNTO DI MIN PER DEF: $f(x,y) \geq f(A)$

$$1 - \sqrt{-x^2+2x-\frac{1}{4}y^2} \geq 0$$

$$\sqrt{-x^2+2x-1/4\,y^2} \leq 1$$

$$\sqrt{\underbrace{1}_{} - \underbrace{(x-1)^2 - 1/4\, y^2}_{}} \leq 1$$

UNO MENO UNA COSA SEMPRE NEGATIVA SARÀ SEMPRE MINORE DI UNO

$A = (1, 0)$ È MIN. GLOBALE

- QUESTA FUNZIONE AMMETTE ANCHE PUNTI DI MASSIMO? ADDIRITTURA GLOBALI?

↳ SE CI SONO, SONO SULLA FRONTIERA (ES. $(0,0)$)

↳ $f(0,0) = 1$

↳ $f(x,y) = 1 - \sqrt{-x^2+2x-1/4\, y^2} \leq f(0,0) = 1$

$$\sqrt{-x^2+2x-1/4\, y^2} \geq 0$$

↳ SEMPRE VERO $\forall (x,y) \in D$

→ $A = (0,0)$ È MAX GLOBALE COME OGNI PUNTO SULLA FRONTIERA

ESERCIZIO

$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

- TROVARE ESTREMI

MIN. ASSOL. È ZERO, MAX ASS. 2

1° PASSO

$f_x = 2x - 2xy$

$f_y = 4y - x^2$

$$\begin{cases} 2x - 2xy = 0 \\ 4y - x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - xy = 0 \\ 4y - x^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(1-y) = 0 \; \begin{cases} x = 0 & ① \\ y = 1 & ② \end{cases} \\ 4y = 0 \to y = 0 \to (0,0) \\ 4 - x^2 = 0 \quad x^2 = 4 \quad x = \pm 2 \; \begin{cases} (2,1) \\ (-2,1) \end{cases} \end{cases}$$

$S_f = \{(0,0), (-2,1), (2,1)\}$

2° PASSO

$f_{xx} = 2 - 2y \quad f_{yy} = 4 \quad f_{xy} = -2x$

$$H = \begin{pmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 4 \end{pmatrix}$$

$\det(H) = 8 - 8y - 4x^2 = 4(2 - 2y - x^2) \rightsquigarrow 2 - 2y - x^2$

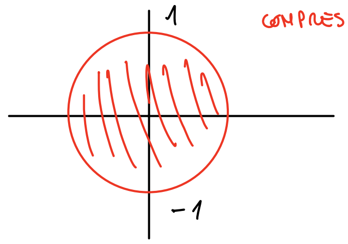
$(0,0) = 2 > 0 \to$ MIN. LOCALE PERCHÉ $f_{xx}(0,0) = 2 > 0$ $\quad f(0,0) = 0$

$(-2,1) =$ SELLA

$(2,1) =$ SELLA

UNICO ESTREMO

• TROVARE I VALORI DI MIN. E MAX. DELLA f SUL SOTTO-DOMINIO $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x^2+y^2 \leq 1 \}$



COMPRESA FRONTIERA

CERCO I PUNTI DI MIN. E MAX. DENTRO E

$$E = \underbrace{\mathring{E}}_{\text{P.TI INTERNI}} \cup \underbrace{Fr(E)}_{\text{FRONTIERA}}$$

STANNO DENTRO $\mathring{E}$? L'ORIGINE $\in \mathring{E}$ $\Rightarrow$ L'UNICO ESTREMO $\in \mathring{E}$ È $(0,0)$ ED IL SUO VALORE È ZERO
$\hookrightarrow$ ZERO È CANDIDATO AD ESSERE VAL. MIN.

ORA CERCO IN FRONTIERA E SONO SICURO CHE CI SONO PER TM. WEISTRASS: f CONT., D CHIUSO E LIMITATO $\subseteq \mathbb{R}^n$

$f: D \to \mathbb{R}$ AMMETTE SIA PUNTO DI MIN GLOB. CHE MAX. GLOB.

E È SIA CHIUSO CHE LIMITATO $\to$ AMMETTE MIN. GLOB E MAX GLOB.

CALCOLO f SU FRONTIERA ! $\to$ CERCARE SE SI PUÒ DI INSERIRE I PUNTI DI FRONTIERA NELLA f $\Rightarrow$ ESPLICITARE UNA DELLE DUE VARIABILI E INSERIRLA NELLA f

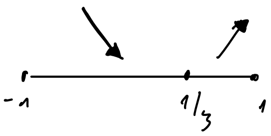
QUALSIASI PUNTO $x^2+y^2=1$ $\to$ $x^2 = 1-y^2$

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2 y$$

$$\hookrightarrow 1-y^2+2y^2-(1-y^2)y$$

$$F(y) = y^3+y^2-y+1 \qquad F: [-1,1] \to \mathbb{R}$$

$$F'(y) = 3y^2+2y-1 \geq 0 \qquad 3y^2+2y-1=0 \qquad \begin{aligned} y_1 &= -1 \\ y_2 &= 1/3 \end{aligned}$$



$\hookrightarrow$ P.TO MIN.

$F(-1) = 2$

$F(1) = 2$ I VALORI VE LE DICONO LE QUOTE

$F(1/3) = \frac{22}{27}$